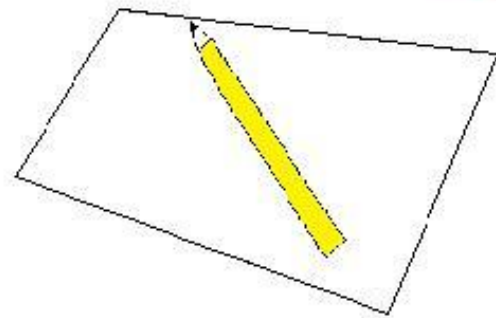
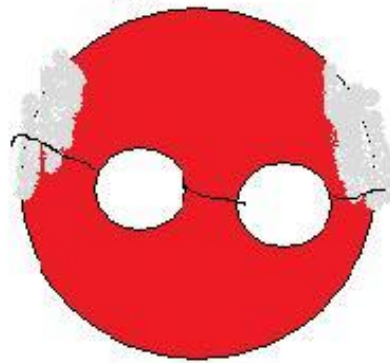




D
I
V
I
S
J
O
N



- FRA A TIL Å -

VEILEDER FOR FORELDRE MED BARN I 5. – 7. KLASSE



Divisjon Fra a til å

VEILEDER FOR FORELDRE MED BARN I 5. – 7. KLASSE

	EMNER	Side
1	Innledning til divisjon	3
2	Hva elever skal kunne etter 4. klassetrinn	4
3	Å dele er mer enn å dele en pizza	5
	3a Når noe skal deles	7
	3a.1 Med rest som regnes med	8
	3a.2 Med rest som ikke regnes med	9
	3b Når noe skal måles	10
	3b.1 Med rest som regnes med	12
	3b.2 Med rest som ikke regnes med	13
4	Flere måter å gjøre det på (Algoritmer)	14
	4a Forberedende algoritmer	14
	4b Standardalgoritme	16
	4c En algoritme som er mye brukt (Trappetrinn)	20
	4d Algoritme med forenklet notering	24
	4e Algoritme med utgangspunkt i praktisk deling	26
5	Litt mer avansert	27
	5a Når du skal dele på et tall med flere siffer	27
	5b Når du skal dele på 10, 100, 1000 osv	29
	5c Når du skal dele et desimaltall	30
	5d Når du skal dele på et desimaltall	30
	5e Når stykket ikke går opp	32
	5e.1 Løsning med rest	32
	5e.2 Løsning med desimaltall	32
	5e.3 Løsning med brøk	35



1 INNLEDNING TIL DIVISJON

Divisjon er en av de fire regneartene. Svært ofte viser det seg å være en av de store bøygene for mange barn. Ofte kan årsaken til vanskelighetene her være en av to:

1. Barnet mangler grunnleggende forståelse for hva divisjon egentlig er. De fleste knytter divisjon til det å dele, og kan dermed ha etablert en grunnleggende misoppfatning til divisjonsprosessen.
2. Barnet møter teoretiske problemstillinger knyttet til divisjon på et for tidlig tidspunkt. Et eksempel på for tidlig teoretisering kan være at algoritme (fremgangsmåte) knyttet til hvordan løse en divisjonsoppgave blir selve problemstillingen før barnet har forstått hvordan den samme oppgaven kan løses rent praktisk.

Dette er prosesser som først og fremst hører hjemme på småskoletrinnet. På mellomtrinnet er problemstillingen først og fremst å utvide barnets forståelse. Her innføres divisjon med rest. Her innføres distinksjonen mellom målings- og delingsdivisjon. Her utvides tallbegrepet til å omfatte desimaltall og negative tall.

Men hvis et barn har problemer med å forstå divisjon, vil vi kunne observere dette gjennom de feilene barnet gjør, og de misoppfatningene barnet har etablert. For dette barnet er det nyttig å se progresjonen i forholdet til divisjon også for småskoletrinnet. Det er derfor naturlig å starte denne innføringen i divisjon for mellomtrinnet med et kapittel om hva barnet har gjennomgått i småskolen, og hva det forventes å kunne når det begynner i 5. klasse.



2 HVA ELEVENE SKAL KUNNE ETTER 4. KLASSETRINN

Denne veilederboken er ikke knyttet til noe bestemt læreplan. Når boken skrives (2009 – 2010) gjelder lærerplanen Kunnskapsløftet (Kunnskapsdepartementet and Utdanningsdirektoratet 2006) . For å gjøre dette kapitlet kort og oversiktelig, velger jeg å referere til Kunnskapsløftet i denne sammenheng. De kompetansemålene som er oppgitt i dette kapitlet er derfor hentet fra denne lærerplanen, og gir en indikasjon om hva som i dag forventes av kunnskap hos barn som begynner i 5. klassetrinn.

Kompetansemål etter 2. årstrinn

Tall

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- telle til 100, dele opp og bygge mengder opp til 10, sette sammen og dele opp tiergrupper
- doble og halvere

Kompetansemål etter 4. årstrinn

Tall

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- bruke den lille multiplikasjonstabellen og gjennomføre multiplikasjon og divisjon knyttet til ulike praktiske situasjoner
- velge og begrunne valg av regneart, bruke tabellkunnskaper tilknyttet regneartene og utnytte enkle sammenhenger mellom regneartene



3 Å DELE ER MER ENN Å DELE EN PIZZA

Som vi så i forrige kapittel, er divisjonserfaringene hos barn frem til og med 4. klasse først og fremst knyttet til praktiske øvinger med deling. Det aller mest grunnleggende er at det skal deles likt. Hvis to personer skal dele 400 kroner, vil de aller fleste mene at de får 200 kroner hver. Det er ikke alltid slik. Det hender at den ene får 300 kroner og den andre får 100 kroner. Selv om de ikke får like mye, så er de 400 kronene delt på 2 personer.

I det virkelige livet praktiserer vi alle varianter av å dele. Her er noen eksempler:

1. Du er ute på restaurant og spiser sammen med venner. Når regningen skal betales, hvordan deles den? Hele regningen delt (likt) på antall deltakere? Hver deltaker gransker regningen og finner ut hvor mye han/hun har spist og drukket for? Uansett: Dere deler regningen.
2. Hvis det er pizza dere spiser – er dere nøye på at alle spiser like mye, eller deler dere en pizza selv om Ole spiser 3 store stykker og du spiser 2 små? Betaler dere hele pizzaen selv om det blir liggende igjen en bit?
3. Har du noen gang opplevd to eller flere barn som skal dele snop? Ofte kan det bli en hel greie av å få delt så rettferdig – så likt – som mulig.

Å dele er ikke alltid å dele likt, men når det gjelder divisjon slik vi bruker ordet i matematikken, vil utgangspunktet være at det skal deles likt. De fleste barn som blir stilt overfor en praktisk oppgave om for eksempel å dele et gitt antall brikker, vil bestrebe seg på at alle skal få like mye. Et barn som har skjønt dette, har skjønt selve grunnprinsippet om deling og divisjon.

Matematikken har navn på alt. Også de ulike tallene som inngår i et divisjonstykke har sine egne navn. Vi kaller det tallet som skal deles for dividend. Det kan oversettes med ”Det som skal deles”. Hvor mye det skal deles på, eller hvor mange deler dividenden skal deles i, kalles divisor. Resultatet kalles kvotient (uttales kvosient)..

$$\text{Dividend} : \text{divisor} = \text{Kvotient.}$$



Ofte brukes kvotienten som et forholdstall. Det mest kjente eksemplet er π (pi). Det fremkommer hvis du deler omkretsen i en sirkel på diameteren.. Dette forholdstallet brukes i nær sagt alle beregninger som impliserer en sirkel. Når kvotienten behandles som en fast konstant (som π) kalles den koeffisient. Bruken av π er nærmere omtalt i kapitlet ”Geometri”. En morsom og lærerik øvelse er å måle omkretsen og diameteren på flere sirkler og regne ut forholdet mellom dem. Mange blir overrasket og forbauset når de ser at svaret alltid blir tilnærmet lik 3,14.

Men for å få til denne øvelsen, er det en forutsetning å beherske divisjon. Og å ha en innarbeidet fremgangsmåte som gjør operasjonen enklere. Fremgangsmåter ved utregninger slår for alvor inn på mellomtrinnet.

Men for å utvide barnets forståelse og begrepsapparat er det nødvendig også å utvide delebegrepet til det mer omfattende divisjonsbegrepet. Divisjon brukes ikke bare når noe skal deles (Breiteig and Venheim 1999). Og det er ikke alltid at regnestykket går opp. Vi skal se på noen slike eksempler.



3a NÅR NOE SKAL DELES (Delingsdivisjon)

Ved delingsdivisjon vil tallet du deler på (divisor) angi hvor mange delmengder et tall (dividenden) skal deles opp i. Spørsmålet er hvor store delmengdene blir:

Eksempel:

Vi har 18 egg, og de skal fordeles på tre eggkartonger. Hvor mange egg blir det i hver kartong?

	:		=	
18	:	3	=	6

I en delingsdivisjon vil benevningen i svaret være den samme som i tallet som skal deles (dividenden). Vel, det stemmer ikke helt. Den korrekte benevningen i dette svaret er egg/pk. Dette er nærmere forklart i kapitlet om brøk. Men som en hjelperegel kan det holde, og bidra til å forstå forskjellen på delings- og målingsdivisjon.

Som en hjelperegel for å skille delingsdivisjon fra målingsdivisjon er det mulig å forestille seg at man i delingsdivisjon ofte kan tenke seg at man deler på et antall personer i en delingsdivisjon. Selv om oppgaven ikke uttrykker det, vil det ofte være mulig å tenke seg det. I eksemplet overfor er det mulig å tenke seg 18 egg delt på 3 personer i stedet for 3 kartonger. I eksemplet i kap. 3a.1 kan man tenke seg at kjeler kan erstattes med personer uten at det gjør noe for hvordan vi forstår oppgaven.

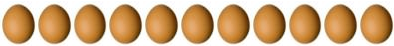



3a.1 Delingsdivisjon med rest som regnes med

Ofte er det slik at delestykket ikke går opp. Det vil avhenge av oppgaven (oppdraget) om vi skal regne med eller se bort i fra denne resten.

Eksempel:

Du skal koke 11 egg i 2 omganger. Hvor mange egg må det være plass til i kjelen?

	:		=	
11	:	2	=	5
				(+ 1 i rest)

Her ser vi at selv om svaret i dette delestykket blir 5 med 1 til rest, må svaret på oppgaven bli 6. Det må være plass til 6 egg i kjelen for å kunne koke 11 egg i 2 omganger.



3a.2 Delingsdivisjon med rest som ikke regnes med

Men så hender det at den resten som blir igjen ikke får noen betydning for løsningen på oppgaven:

Eksempel:

Du har 17 egg, og skal steke vafler. Den oppskriften du har vil gi for lite vafler, og du har bare egg nok til å 3-doble oppskriften. Hvor mange egg krever oppskriften?

	:		=	
17	:	3	=	5
				(+ 2 i rest)

Her spiller det ingen rolle om du får 2 egg til overs. Du kan likevel bare få plass til 5 egg i oppskriften. (Men spør du meg blir vaflene enda bedre om du hiver oppi de to siste eggene også.)

Så langt har vi sett på divisjon der noe skal deles. Det er slik de fleste er vant til å forstå divisjon. Men divisjon er mer...



3b NÅR NOE SKAL MÅLES (Målingsdivisjon)

Når det gjelder målingsdivisjon angir tallet du deler på (divisor) hvor store delmengder vi skal dele et tall (dividenden) i. Her blir altså spørsmålet hvor mange slike delmengder det blir. På mange måter har vi den motsatte problemstillingen av hva vi hadde med delingsdivisjon.

Eksempel:

Vi har 18 egg, og de skal fordeles på eggkartonger med 6 egg i hver kartong.. Hvor mange kartonger trenger vi?

	:		=	
18	:	6	=	3




I målingsdivisjon vil dividend og divisor ofte ha samme benevning og svaret vil ofte ikke ha noen benevning i det hele tatt. Når det gjelder regnefortellinger (tekstoppgaver) vil det derfor være viktig at tekstsvaret blir presist utformet.

Hva målingsdivisjon egentlig er kommer enda tydeligere frem dersom vi har et eksempel der vi faktisk måler noe. Eksemplet på neste side viser dette.



Eksempel:

Du har 9 liter vann. Dette skal fylles på flasker som tar $\frac{3}{4}$ liter. Problemet blir altså å finne ut hvor mange flasker du trenger. Det betyr at du i divisjonen måler opp hvor mange flasker som går med.

	:		=	
9	:	0,75	=	12

Å dele på et tall som er mindre enn 1 gir et svar som er større enn det tallet vi i utgangspunktet skal dele. Dette retter fokus mot en av de klassiske missoppfatningene når det gjelder deling, nemlig den forestillingen av svaret i et delestykke alltid blir mindre enn det tallet vi skal dele. Det er ikke alltid sant, noe dette eksemplet viser.

I tillegg kan vi observere at delestykker der vi skal dele på en størrelse som ikke er et helt tall må nødt til å være en målingsdivisjon. Svært ofte, men ikke alltid, er det slik at vi kan tenke oss at et tall skal deles på et gitt antall personer. Dersom oppgaven ikke sier noe om dette, kan vi forsøke å tenke oss personer. Som i eksemplet fra delingsdivisjon der vi skal koke egg i en kjele. Der kunne vi endret oppgaven til å handle om personer i stedet (For eksempel: 11 egg skal flyttes fra kjøleskapet til bakebordet. Du må hente eggene i 2 omganger. Hvor mange egg må du klare å bære samtidig?)

I eksemplet med flaskene overfor er det vanskelig å tenke seg å dele på personer, rett og slett fordi det ikke gir noen mening å snakke om $\frac{3}{4}$ person. Dermed blir det tydeligere at vi snakker om målingsdivisjon.



3b.1 Målingsdivisjon med rest som regnes med

Eksempel:

Du skal flytte disse eggkartongene fra bordet og sette dem inn i skapet. Du klarer å bære 2 kartonger på en gang. Hvor mange ganger må du gå fra bordet til skapet?

	:		=	
3	:	2	=	1
				(+ 1 i rest)

Her ser vi at selv om svaret i delestykket blir 1, så må løsningen på oppgaven bli 2. Du må gå to ganger for å flytte alle tre kartongene, når du bare klarer to av gangen.



3b.2 Målingsdivisjon med rest som ikke regnes med

Dette er den type oppgaver som de fleste husker fra sin egen skoletid. Et delestykke som ikke går opp, og som ender med en rest. For mange er det (og var det, kanskje?) et logisk problem at denne resten bare ble hengende der uten mål og mening.

I det praktiske liv kan det svært ofte hende at vi uten å blunke foretar en målingsdivisjon med en rest som ikke regnes med. La oss holde oss til eksemplet med eggene. Nå står det altså 3 kartonger med til sammen 18 egg i skapet. Og så skal du bake:

Du har 18 egg. Oppskriften krever 5 egg, og du skal ha et stort selskap, så du bestemmer deg for å bake flere kaker. Problemstillingen blir hvor mange kaker du har egg til!

	:		=	
18	:	5	=	3
				(+ 3 i rest)

Her ender du altså opp med en rest på 3, men praktisk sett er det helt uten betydning. Divisjonen viser at du har nok egg til å bake 3 kaker.

Målingsdivisjon med rest som regnes med



Flere måter å gjøre det på

4 FLERE MÅTER Å GJØRE DET PÅ

La oss se på hvordan ulike divisjonsalgoritmer kan utvikles.

I sin enkleste form er divisjon det motsatte av multiplikasjon.

Eksempel 1:

Multiplikasjon:	$5 \cdot 6 = 30$
Eller	$6 \cdot 5 = 30$
Divisjon:	$30 : 6 = 5$
Eller	$30 : 5 = 6$

I dette eksemplet er det altså viktig å kunne 5-gangen eller 6-gangen.

Forberedende algoritme

4a FORBEREDENDE ALGORITMER

Litt vanskeligere blir det straks når tallet som skal deles blir mer enn 10 ganger så stort som tallet du skal dele på. Altså når den lille multiplikasjonstabellen ikke strekker til. Da trenger vi å utvikle et system – en fremgangsmåte – en algoritme:

Eksempel 2: Trinn a

$$75 : 5 =$$

I praktisk regning kan for eksempel 75 splittes opp:

Eksempel 2: Trinn b

$75 : 5 =$	$70 : 5 =$
	$5 : 5 =$

...men dette gjør i grunnen ikke situasjonen noe lettere. Vi står fortsatt igjen med problemet $70 : 5$, som vi ikke uten videre kan lese ut av den lille multiplikasjonstabellen.



En annen måte å tenke på er altså å splitte 75 opp i størrelser som vi kan finne igjen i multiplikasjonstabellen. For eksempel:

Eksempel 2: Trinn c

$$75 : 5 = \quad 50 : 5 =$$
$$\quad \quad \quad 25 : 5 =$$

Her har vi delt opp 75 i tall som vi kjenner fra 5-gangen – og det er jo 5 vi skal dele på.

Eksempel 2: Trinn d

$$75 : 5 = \quad 50 : 5 = 10$$
$$\quad \quad \quad 25 : 5 = 5$$

I eksempel 2d ser vi raskt at $75 : 5 = 15$ (summen av de to delingene).

Denne fremgangsmåten kan også brukes på litt større regnestykker:

Eksempel 2: Trinn e

$$475 : 5 = \quad 400 : 5 = 80$$
$$\quad \quad \quad 50 : 5 = 10$$
$$\quad \quad \quad 25 : 5 = 5$$

Men allerede her støter vi på et litt større problem, nemlig $400 : 5$. Vi må kunne se at 400 er $50 \cdot 8$ og at $50 = 10 \cdot 5$. Bytter vi 4-tallet ut med et 6-tall, ser vi problemet enda tydeligere.

Altså ser vi at denne algoritmen allerede her er i ferd med å nå sin yttergrense. Den er fullt ut brukbar ved små tall, og barn som bruker denne algoritmen viser stor grad av forståelse både når det gjelder tall og tallstørrelser, og når det gjelder selve divisjonsprosessen. Men den har altså sine begrensninger, og er vel å betrakte som et stadium frem mot en mer teoretisk, men også mer anvendelig algoritme når det gjelder større og mer komplekse tall.



4b STANDARDALGORITME

Denne fremgangsmåten (algoritmen) er nok den som brukes i de fleste læreverk for tiden. Det er derfor jeg velger å kalle den Standardalgoritme.

Vi velger oppgaven:

Eksempel 3: Trinn a

$$675 : 5 =$$

Vi skjønner fra tidligere at tallet 675 kan deles opp:

Eksempel 3: Trinn b

$$\begin{aligned} 600 : 5 = \\ 70 : 5 = \\ 5 : 5 = \end{aligned}$$

Det er viktig å ha denne forståelsen, selv om vi i denne algoritmen ikke splitter opp tallet. Hvis vi skulle delt for eksempel 675 kroner på 5 personer, ville de fleste av oss begynt med å dele ut de største enhetene, hundrekronerssedlene. Merk at det er 6 hundrekroner-sedler, og ikke 600.

Eksempel 3: Trinn c

$$675 : 5 = 1$$



Når alle har fått 1 hundrelapp hver, har vi delt ut 5 hundrelapper. Av de 6 vi har til utdeling, står vi altså igjen med 1 hundrelapp.

Eksempel 3: Trinn d

$$675 : 5 = 1$$
$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 1 \end{array}$$

Men vi kan ikke uten videre dele en hundrelapp på 5 personer. Den må veksles inn i tiere.

1 hundrelapp = 10 tiere

$$675 : 5 = 1$$
$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 10 \end{array}$$

Men så er det vi må huske på utgangspunktet: 675. Vi har jo 7 tiere fra før. De legger vi nå i haugen sammen med de 10 tierne vi vekslet inn.

Eksempel 3: Trinn e

$$675 : 5 = 1$$
$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 17 \end{array}$$

OK. Så nå har vi 17 tiere som skal deles på 5 personer. Da får de 3 tiere hver:

Eksempel 3: Trinn f

$$675 : 5 = 13$$
$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 17 \end{array}$$



Divisjon fra a til å

5 personer har fått 3 tiere hver. Så blir det å spørre: Hvor mange tiere har vi da delt ut?

Jo, vi har delt ut $3 \cdot 5 = 15$.

Og vi står igjen med 2 av de 17 tierne.

Eksempel 3: Trinn g

$$675 : 5 = 13$$

$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 2 \end{array}$$

Og dermed står vi i grunnen der vi stod med 1 hundrelapp som vi ikke uten videre kunne dele ut. De 2 tierne kan heller ikke uten videre deles på 5. Prøv så skal du se.

Og løsningen på dette problemet blir det samme som sist: Vi må veksle:

$$675 : 5 = 13$$

$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 20 \end{array}$$

2 tiere er blitt til 20 kronestykker.

Så er det bare å huske på de 5 kronene vi hadde i utgangspunktet. Det er viktig at vi her tenker 5 kronestykker, og ikke 1 femkrone. Hele fremgangsmåten er basert på titallsystemet (Det er nærmere forklart i et eget hovedkapittel).

Eksempel 3: Trinn h

$$675 : 5 = 13$$

$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$



Nå nærmer vi oss slutten. Vi har delt ut hundrelappene og tikronene. Nå står det igjen å dele ut kronestykkene.

Eksempel 3: Trinn i

$$675 : 5 = 135$$
$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$

Nå har de fem personene fått 135 kroner hver. Og hadde dette vært en konkret, praktisk situasjon, ville alle sett at giveren sto tomhendt tilbake.

Men regnestykket er ikke ferdig riktig ennå. Vi må forsikre oss om at alle pengene er delt ut. Det gjør vi ved å se hvor mange enkrone som er delt ut når 5 personer har fått 5 kroner hver. Altså: $5 \cdot 5 = 25$

Eksempel 3: Trinn j

$$675 : 5 = 135$$
$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

Vi ser at vi har brukt opp alt sammen, og står igjen med 0 kroner.

Kortversjonen av denne fremgangsmåten blir:

1. Man dividerer første siffer med divisor (Divisjonen foregår mot høyre)
2. Man multipliserer tilbake (svaret \cdot divisor), for å finne ut hvor mye man "har brukt" (Multiplikasjon foregår mot venstre)
3. Man subtraherer det man har brukt fra det man hadde, for å finne ut hva man har igjen (resten)
4. Man adderer neste siffer i dividenden med resten.

Og da står man overfor en ny divisjon mot høyre, etterfulgt av en ny multiplikasjon mot venstre o.s.v.



Skal man lage en regel for hvordan denne algoritmen virker, kan det være:

REGEL 	Trinn	1	2	3	4
	Regneart	:	.	-	+
	Retning	→	←	↓	↓

4c EN ALGORITME SOM ER MYE BRUKT (Trappetrinn)

Denne fremgangsmåten er mye i bruk. Mange foreldre har lært denne på skolen, mens barna kanskje lærer en annen fremgangsmåte på skolen.

Sammenligner du med standardalgoritmen (kap. 4b), vil du se at de i virkeligheten er ganske like. Den største forskjellen ligger i måten selve oppgaven, regnestykket, er skrevet. Standardalgoritmen skrives slik som vi vanligvis leser – fra venstre mot høyre – og kan leses direkte ut av hvordan den føres: Sekshundreogsyttifem delt på fem. Trappetrinnsalgoritmen leses som: 5 går opp i 6 1 gang...

Eksempel 4: Trinn a

$$675 : 5 =$$

For å komme i gang med denne fremgangsmåten må oppgaven skrives på en annen måte:

Eksempel 4: Trinn b

$$\underline{\quad} 5 \overline{) 675}$$



Her vil svaret komme over linja (På det øverste trappetrinnet), og utregningen kommer under tallet 675.

Vi begynner med å spørre: Hvor mye går 5 opp i 6: Svar 1

Da skriver vi 1 over linja

Eksempel 4: Trinn c

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5 \overline{) 675} \end{array}$$

$1 \cdot 5 = 5$. Derfor skriver vi 5 under 6-tallet

Eksempel 4: Trinn d

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5 \overline{) 675} \\ 5 \end{array}$$

Deretter trekker vi 5 fra 6:

Eksempel 4: Trinn e

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5 \overline{) 675} \\ \underline{5} \\ 1 \end{array}$$

Det neste trinnet blir å trekke ned 7-tallet

Eksempel 4: Trinn f

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5 \overline{) 675} \\ \underline{5} \\ 17 \end{array}$$



Divisjon fra a til å

Og vi får en ny problemstilling: Hvor mye går 5 opp i 17? Svaret er 3. Vi fører 3 opp i svaret og 15 under 17 (Fordi $3 \cdot 5 = 15$).

Eksempel 4: Trinn g

$$\begin{array}{r} 13 \\ 5 \overline{) 675} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \end{array}$$

Og nå trekker vi 15 fra 17. Det blir 2.

Eksempel 4: Trinn h

$$\begin{array}{r} 13 \\ 5 \overline{) 675} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 2 \end{array}$$

Deretter trekker vi ned 5-tallet:

Eksempel 4: Trinn i

$$\begin{array}{r} 13 \\ 5 \overline{) 675} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$



Divisjon fra a til å

...og et nytt spørsmål: Hvor mye går 5 opp i 25? Svaret er 5. Vi skriver 5 opp i svaret og 25 ned i regnestykket

Eksempel 4: Trinn j

$$\begin{array}{r} 135 \\ 5 \overline{) 675} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

Og da står det bare igjen å kontrollere at delestykket går opp. Ved å trekke 25 fra 25. Svaret blir 0.

Eksempel 4: Trinn k

$$\begin{array}{r} 135 \\ 5 \overline{) 675} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$



4d Algoritme med forenklet noteringsmåte

Mange elever foretrekker å skrive minst mulig. De fleste antar at lite skrijving er det samme som lite tenking. Det er ikke alltid riktig. Denne fremgangsmåten ser enkel ut. Det er den også, men den krever et klart hode.

Vi henter frem eksemplet fra standardalgoritmen (kap 4b).

Eksempel 5: Trinn a

$$675 : 5 =$$

Vi ser at 5 går 1 gang opp i 6

Eksempel 5: Trinn b

$$675 : 5 = 1$$

Da har vi brukt 5 av de 6, og har 1 igjen. Den eneren fører vi opp som minnetall mellom hundrerplassen og tierplassen. Dermed kan vi se at vi har 17 tiere (minnetallet pluss de 7 tierne vi har fra før)

Eksempel 5: Trinn c

$$\overset{1}{6}75 : 5 = 1$$



Divisjon fra a til å

Nå har vi $10 + 7 = 17$ på tierplassen. 5 går 3 ganger i 17. Vi skriver 3 i svaret

Eksempel 5: Trinn d

$$\begin{array}{r} 1 \\ 675 : 5 = 13 \end{array}$$

Da har vi brukt 15 av de 17, og står igjen med 2. Disse 2 fører vi opp som et minnetall mellom tierplassen og enerplassen

Eksempel 5: Trinn e

$$\begin{array}{r} 12 \\ 675 : 5 = 13 \end{array}$$

På enerplassen har vi dermed 2 tiere pluss de 5 enerne vi hadde fra før: $20 + 5 = 25$. 5 går 5 ganger i 25. Vi skriver 5 i svaret.

Eksempel 5: Trinn f

$$\begin{array}{r} 12 \\ 675 : 5 = 135 \end{array}$$

Som sagt – en meget forenklet skrivemåte, og kanskje også en forenklet tenkemåte. Men prosessen er akkurat den samme som i standardalgoritmen.



4e Algoritme med utgangspunkt i praktisk deling

Denne algoritmen kan synes litt komplisert og ulogisk, men den tar utgangspunkt i hvordan mange tenker (Kjøsnes 1997). For ordens skyld har jeg skrevet trinnvise kommentarer ved siden av utregningen.

Eksempel 6:

Utgangspunktet er regnestykket $354 : 6 =$

		$354 : 6 =$	
Trinn a	Det går i hvert fall $6 \cdot 5 = 30$. Da har vi altså delt ut 30	<u>30</u>	5
Trinn b	Med over 300 igjen kan de sikkert få 10 til hver. Da deler vi ut $6 \cdot 10 = 60$	<u>324</u> <u>60</u>	10
Trinn c	Det går sikkert an å dele ut 20 til hver, også. $6 \cdot 20 = 120$	<u>264</u> <u>120</u>	20
Trinn d	Vi ser greit at det går med 20 til...	<u>144</u> <u>120</u>	20
Trinn e	Det strammer seg til. 6 går 4 ganger i 24 $6 \cdot 4 = 24$	<u>24</u> <u>24</u>	4
	Nå går det ikke å dele på 6 mer.	0	<u>59</u>
	Altså får vi at: $354 : 6 = \underline{\underline{59}}$		

Det spiller ingen rolle hva man begynner å dele på så lenge man holder ”regnskap” med hva man har gjort. Etter å ha fått litt erfaring ved hjelp av litt prøving og feiling, vil man bli ganske god til å velge mer og mer fornuftig utgangspunkt. Man vil for eksempel se at man kommer ganske langt med å gange divisor (6 i dette eksemplet) med 10, 20, 100. For de fleste vil det forenkle tenkearbeidet vesentlig.



5 LITT MER AVANSERT

Når et barn har lært seg å beherske en algoritme, står vi klar med enda noen utfordringer. Innenfor rammen av mellomtrinnet er det 5 nye områder som gjelder når divisjonsferdigheter skal utvikles videre. Det gjelder:

1. Når du skal dele på et flersifret tall.
2. Når du skal dele på 10, 100, 1000 o.s.v.
3. Når du skal dele et desimaltall
4. Når du skal dele på et desimaltall
5. Når stykket ikke går opp

I dette kapitlet skal vi se på disse fem utfordringene. Jeg tar utgangspunkt i standardalgoritmen, men andre algoritmer er fullt ut i stand til å handtere disse utfordringene.

5a NÅR DU SKAL DELE PÅ ET TALL MED FLERE SIFFER

Dersom divisor har bare ett siffer klarer du deg greit hvis du har kontroll på den lille multiplikasjonstabellen (Gangetabellen fra 1 til 10). Verre blir det hvis divisor har flere siffer. Du kommer et stykke på vei ved å lære deg den store multiplikasjonstabellen (fra 11 til 20), men det hjelper deg lite når divisor blir enda større, for eksempel 47.

Det er nyttig å kunne et par-tre triks i den forbindelse:

For det første kan det være nyttig å kunne regne med overslag (behandles i et annet kapittel i boken).

Se på dette eksemplet:

Eksempel 7: Trinn a

$$1692 : 47 =$$

Vi ser at 47 kan rundes av til 50. Tallet 169 delt på 50 blir omtrent 3. $50 \cdot 3 = 150$, så det prøver vi:



Men vi må huske på at det ikke er 50, men 47 vi skal regne med. $47 \cdot 3 = 141$

Eksempel 7: Trinn b

$$\begin{array}{r} 1692 : 47 = 3 \\ 141 \end{array}$$

Så jobber vi oss videre:

Eksempel 7: Trinn c

$$\begin{array}{r} 1692 : 47 = 3 \\ \underline{141} \\ 282 \end{array}$$

Her har vi flaks, for vi kan se at 282 er det dobbelte av 141. Altså blir svaret dobbelt så stort, nemlig 6.

Eksempel 7: Trinn d

$$\begin{array}{r} 1692 : 47 = 36 \\ \underline{141} \\ 282 \\ \underline{282} \\ 0 \end{array}$$

Et annet triks kan være å lage seg den lille tabellen til divisor. Skal du for eksempel dele på 38, er det enkelt å lage (på et kladdark) den aktuelle gangetabellen. Den lager du ved å addere 38 ti ganger (se tabell neste side):



38	.	1	=	38
				+ 38
38	.	2	=	76
				+ 38
38	.	3	=	114
				+ 38
38	.	4	=	152
				+ 38
38	.	5	=	190
				+ 38
38	.	6	=	228
				+ 38
38	.	7	=	266
				+ 38
38	.	8	=	304
				+ 38
38	.	9	=	342
				+ 38
38	.	10	=	380

Det er viktig å holde tunga rett i munnen. Du får en test på om du har regnet riktig når du kommer til 5-gangen, fordi det skal slutte på 0 eller 5 (Se avsnittet om hoderegning). Du får også en endelig bekreftelse på at du har regnet riktig når du kommer til det siste tallet, fordi et tall ganget med 10 gir som svar tallet med en null bakerst ($38 \cdot 10 = 380$).

En slik tabell kan synes litt tungvint å lage, og det kan være lurt å trene litt på å lage slike. Etter hvert går det greiere.

5b NÅR DU SKAL DELE PÅ 10, 100, 1000 OSV.

Ofte sies det at å dele på 10, 100, 1000 o.s.v. er enkelt. Det er bare å flytte komma en eller flere plasser mot – tjå, var det mot høyre eller venstre, tro? Antall plasser bestemmes av antall nuller i tallet du deler på (divisor).

Populære og litt lettvinde løsninger kan nok fungere som tommelfingerregler, men de gir ikke særlig god forståelse av hva som faktisk foregår. Det blir det vi kan kalle ren teknikk, operasjonell regning, greie knagger. Det er fristende å lansere slike løsninger, og de aller fleste barn vil oppdage denne muligheten ganske snart. Men det forutsetter at tallforståelsen er på plass, og kjennskap og erfaring med titallsystemet. Slik kunnskap er grunnleggende og

Når du skal dele på 10, 100, 1000 osv



viktig, og vi risikerer å gjøre barnet en bjørnetjeneste ved å lansere slike operative teknikker for tidlig.

Så hold denne teknikken for deg selv en stund, mens barnet sliter seg gjennom en fullstendig utregning. Så kan du jo etter hvert rette oppmerksomheten mot svaret i forhold til tallet som deles (dividenden), og se om det går et lys opp for avkommet.

(Komma skal for øvrig flyttes mot venstre når det er snakk om deling – mot høyre når vi ganger.)

5c NÅR DU SKAL DELE ET DESIMALTALL

Fremgangsmåten blir omtrent den samme om dividenden er et heltall eller et desimaltall. Du regner som om tallet ikke har komma. Men det er én viktig forskjell:

FOR! Du må passe på når du trekker ned tallet som står på tidelsplassen – det første tallet etter komma. Da må du sette inn et komma i svaret før du trekker ned tallet.

5d NÅR DU SKAL DELE PÅ ET DESIMALTALL

(Dette ligger egentlig utenfor gjeldende læreplan for 5. – 7. klassetrinn. Men mange elever kommer dit, og det er ikke så sjelden man møter denne problemstillingen i livet utenfor skolen. Derfor er det naturlig å ta det med.)

Hvis divisor er et desimaltall stiller det seg litt annerledes. Det er ikke lett å holde styr på desimalene, særlig hvis det blir flere av dem. Det vil derfor være et poeng å bli kvitt desimalene.

Det kan man gjøre ved å multiplisere med 10 (hvis det er 1 desimal, 100 hvis det er 2 desimaler o.s.v.).

Men man kan ikke uten videre multiplisere divisor med 10. Det betyr jo at man dividerer med et tall som er ti ganger så stort.



Men her kommer vi til et av de mange hokus-pokus som man kan tillate seg å gjøre i matematikken. Man kan gange **både** dividend og divisor med det samme tallet. Forholdet mellom dividend og divisor forblir uforandret

Eksempel 8: Trinn a

$$84 : 3,5 =$$

Eksempel 8: Trinn b

$$84 : 3,5 = | \cdot 10$$

Den loddrette streken etter oppgaven betyr at hele regnestykket multipliseres med 10.

Eksempel 8: Trinn c

$$84 : 3,5 = | \cdot 10$$
$$840 : 35 =$$

...og så er det bare å dele iveri...!

I dette eksemplet kunne man også utvidet med 2 i stedet for 10:

Eksempel 8: Trinn d

$$84 : 3,5 = | \cdot 2$$
$$168 : 7 =$$

Det er kanskje litt lettere å dele på 7 enn å dele på 35?

Vi ser i dette eksemplet at dette må være en målingsdivisjon. Rett og slett fordi vi ikke kan tenke oss at man kan dele på 3,5 personer.



Når
stykket
ikke går
opp

5e NÅR STYKKET IKKE GÅR OPP

Ofte vil det være slik at stykket ikke går opp. Vi ender med en rest som ikke uten videre lar seg dele. Om denne resten er viktig eller ikke, vil avhenge av oppgaven (se avsnitt om delings- og målingsdivisjon). Vi skal se på 3 ulike måter å avslutte en slik divisjon på.

Løsning
med rest

5e.1 LØSNING MED REST

Den vanligste formen for avslutning av divisjoner som ikke går opp er å la det ”henge igjen” en rest.

Eksempel:

Eksempel 9:

$$\begin{array}{r} 579 : 6 = \underline{96} \\ \underline{54} \\ 39 \\ \underline{36} \\ 3 \text{ i rest} \end{array}$$

Vi ser at 3 er mindre enn 6. Svaret blir derfor mindre enn 1. Vi får en rest på 3.

Løsning
med
desimal-
tall

5e.2 LØSNING MED DESIMALTALL

Men noen ganger kan vi ikke slå oss til ro med at det blir en rest. Vi må regne videre for å se om stykket kan gå opp. Da må vi innføre desimaltall i svaret, selv om det ikke er desimaltall i oppgaven.



Før vi gjør det må vi vite følgende: Tallet 579 er et heltall. Heltall kan skrives som desimaltall, men med 0 på desimalplassene. Slik: 579,00. Overført til for eksempel penger, vil vi straks se at 579 kroner er akkurat det samme som 579 kroner 0 øre.

Når vi regner videre, tenker vi oss altså at det står 579,00. I stedet for å ende med 3 i rest, henter vi ned 0 fra tidelsplass, og setter samtidig et komma i svaret:

Eksempel 10: Trinn a

$$\begin{array}{r} 579 : 6 = 96, \\ \underline{54} \\ 39 \\ \underline{36} \\ 30 \end{array}$$

Nå ser vi at divisjonen går opp:

Eksempel 10: Trinn b

$$\begin{array}{r} 579 : 6 = \underline{96,5} \\ \underline{54} \\ 39 \\ \underline{36} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

Men vi kan oppleve at vi ikke er så heldige som i dette eksemplet. Kanskje divisjonen ikke går opp før vi har så mange desimaler at det ikke gir noen mening, eller kanskje aldri i det hele tatt. Da kan vi ty til løsningen å avrunde svaret oppover eller nedover. Dette er nærmere omtalt i kapitlet om Hoderegning. Her vises bare to eksempler:



Først å avrunde oppover:

Eksempel 11

$$577 : 6 = 96,166 \approx \underline{96,17}$$
$$\begin{array}{r} 54 \\ \underline{37} \\ 36 \\ \underline{10} \\ 6 \\ \underline{40} \\ 36 \\ \underline{40} \\ 36 \\ 4 \end{array}$$

Vi stryker det siste sifferet, men forhøyer det nest siste fra 6 til 7. Svaret blir unøyaktig, det er litt høyere enn utregninga tilsier. Derfor innføres tegnet \approx . Det betyr ”tilnærmet lik” og indikerer at svaret ikke er nøyaktig.

Så et eksempel på avrunding nedover:

Eksempel 12

$$578 : 6 = 96,333 \approx \underline{96,33}$$
$$\begin{array}{r} 54 \\ \underline{38} \\ 36 \\ \underline{20} \\ 18 \\ \underline{20} \\ 18 \\ \underline{20} \\ 18 \\ 2 \end{array}$$

Her stryker vi det siste sifferet, men gjør ingenting med det nest siste. Svaret blir dermed litt mindre enn utregninga tilsier. Derfor må vi bruke tegnet \approx her også.



5e.3 LØSNING MED BRØK

Har vi en oppgave som ikke går opp, men som likevel krever nøyaktig svar, kan vi ty til brøk. Vi går tilbake til oppgaven i eksempel 12:

Eksempel 13 Trinn a

$$\begin{array}{r} 578 : 6 = 96 \\ \underline{54} \\ 38 \\ \underline{36} \\ 2 \end{array}$$

Vi står igjen med 2 i rest. Denne resten skal deles på 6. $2 : 6$ kan skrives som brøk: $\frac{2}{6}$.

Eksempel 13 Trinn b

$$\begin{array}{r} 578 : 6 = 96\frac{2}{6} \\ \underline{54} \\ 38 \\ \underline{36} \\ 2 \end{array}$$

Dette svaret, $96\frac{2}{6}$, er helt nøyaktig, i motsetning til svarene der vi forhøyet eller forkortet.



KILDER:

Breiteig, T. and R. Venheim (1999). Matematikk for lærere 1. [Oslo], Tano Aschehoug.

Kunnskapsdepartementet and Utdanningsdirektoratet (2006). Læreplanverket for Kunnskapsløftet. Oslo, Utdanningsdirektoratet.

Kjøsnes, Nils Johan: Divisjonsalgoritmen - gudeskapt eller skapt av mennesker? (Tangenten nr. 3 1997)

Smith, K.S og C. B. Hotvedt (2009). Leksehjelpen, Matematikk for foreldre. [Oslo], Kagge Forlag